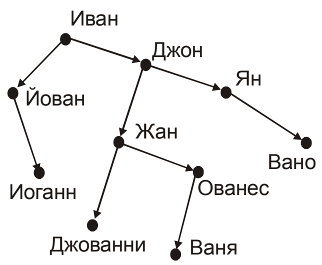
ЗАДАЧИ МЕЖДУНАРОДНОГО КОНКУРСА «Кенгуру»

2002 **9 – 10 классы**

Задачи, оцениваемые в 3 балла

1. Ваня рассматривает свое генеалогическое дерево, где отмечены одни мужчины. Стрелка идет от отца к сыну. Как звали сына брата деда брата отца Вани?



(A) Жан (B) Вано (C) Джон (D) Иоганн (E) другой ответ

2. Одна из граней многогранника – пятиугольник. Какое наименьшее число граней может иметь этот многогранник?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 12

3. Среди всех таких трехзначных чисел, что в их записи все цифры различны, выбрали наибольшее и наименьшее числа. Чему равна разность этих чисел?

(A) 899 (B) 885 (C) 864 (D) 660 (E) другой ответ

4. У пиратов в ходу монеты в 1, 2 и 5 пиастров. В кармане у Флинта 10 пиастров. Тогда число монет у него в кармане не может быть равно

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 4 (E) 3

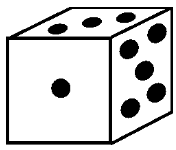
5. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 23, а сумма квадратов катетов равна 289. Тогда периметр этого треугольника равен

(A) 40 (B) 17 (C) 52 (D) 48 (E) 31

6. Число $2 \cdot 2^{2000} + 3 \cdot 2^{2001}$ равно

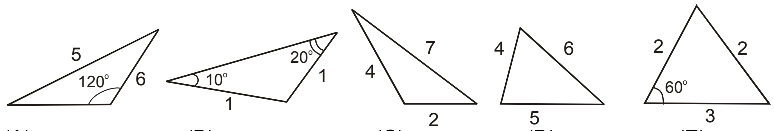
(A) 2^{2002} (B) 2^{2003} (C) 2^{2004} (D) $3 \cdot 2^{2002}$ (E) другой ответ

7. На нижней грани кубика нарисованы 6 точек, на левой – 4 и на задней – 2. Какое наибольшее количество точек можно увидеть одновременно, поворачивая этот кубик в руках?



(A) 15 (B) 14 (C) 13 (D) 12 (E) другой ответ

8. Существует только один треугольник с такими сторонами и углами, как показано ниже. Какой?



(A) (B) (C) (D) (E)

9. Если бы вчера был понедельник, то через 72 часа после сегодняшнего полудня был бы день недели, который на самом деле будет послезавтра. Из этого следует, что завтра будет

(A) понедельник (B) среда (C) четверг
(D) воскресенье (E) другой день

10. Любитель арифметики перемножил первые 2002 простых числа. На сколько нулей оканчивается произведение?

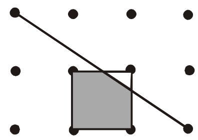
(A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) 20 (E) 100

Задачи, оцениваемые в 4 балла

11. Альберт всегда лжет. Однажды он сказал своему другу Франку: «Хотя бы один из нас никогда не лжет». Тогда обязательно

(A) Франк всегда лжет (B) бывает, что Франк лжет
(C) Франк никогда не лжет(D) бывает, что Франк говорит правду
(E) Альберт не мог произнести такую фразу

12. Если расстояние между соседними (по горизонтали и по вертикали) точками равно 1, то площадь закрашенной фигуры равна



(A) $\frac{9}{10}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{11}{12}$ (E) $\frac{14}{15}$

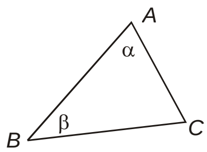
13. Мистеру Бину нужно 50 секунд, чтобы спуститься пешком по неподвижному эскалатору. Движущийся эскалатор поднимает его, стоящего на ступеньке, за 60 секунд. Сколько секунд нужно мистеру Бину, чтобы спуститься пешком по поднимающемуся эскалатору?

(A) $\frac{300}{11}$ (B) 450 (C) 300 (D) 500
(E) это невозможно сделать

14. Число $15 = 3 \cdot 5$ в 5 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от 1. Сколько всего натуральных чисел обладают таким свойством?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) бесконечно много

15. В остроугольном треугольнике *ABC* сторона *BC* вдвое больше стороны *AC*. Какое из условий обязательно верно?



(A) $4\beta < \alpha$ (B) $\beta = 2\alpha$ (C) $\alpha < 2\beta$
(D) $\alpha = 2\beta$ (E) $\alpha > 2\beta$

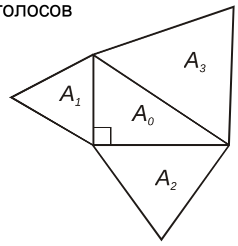
16. Жан-Кристоф продолжает изучать русский язык. Он выписывает цифрами и русскими словами все такие натуральные числа, бóльшие 100, что их словесная запись состоит из двух слов, а в цифровой записи каждая следующая цифра (слева направо) не меньше предыдущей. Сколько таких чисел?

(A) 0 (B) 9 (C) 18 (D) бесконечно много
(E) другой ответ

17. В Цветочном городе выбирают мэра. Знайка набрал 51% голосов, а Незнайка 49%. При этом сами кандидаты не участвовали в голосовании. Если бы каждый из них проголосовал за себя, то Незнайка получил бы

(A) 49% голосов (B) 50% голосов (C) более 50% голосов
(D) менее 49% голосов (E) более 49%, но менее 50% голосов

18. На рисунке изображены 4 треугольника с площадями A_0, A_1, A_2, A_3. Треугольник, имеющий площадь A_0, – прямоугольный, остальные – равносторонние. Тогда



(A) $A_1 + A_2 = A_3$ (B) $A_1^2 + A_2^2 = A_3^2$

(C) $A_1 + A_2 + A_3 = 3A_0$ (D) $A_1 + A_2 = \sqrt{2} \cdot A_3$

(E) ни одно из условий (A) – (D) не обязано выполняться

19. Вилли написал на листе два числа. В качестве третьего числа он написал сумму первого и второго, в качестве четвертого – сумму второго и третьего и т. д., пока не написал шестое число. Потом он сложил все шесть полученных чисел и заметил, что если знать такую сумму, то всегда можно точно определить, каким было одно из шести слагаемых. Какое?

(A) шестое (B) пятое (C) четвертое (D) третье (E) второе

20. Автомат может превратить данное число x либо в $x+3$, либо в $x-2$, либо в $\frac{1}{x}$, либо в x^2. Пусть y – наибольшее число, которое можно получить с помощью этого автомата за 3 шага, начав с числа 1,99. Тогда

(A) $y = (1{,}99)^8$ (B) $y = (4{,}99)^4$ (C) $y = (7{,}99)^2$
(D) $1000 < y < 10\,000$ (E) $y \geq 10\,000$

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. Какое из следующих двойных неравенств невозможно, если $x_1 < x_2 < x_3$?

(A) $x_1^2 < x_2^2 < x_3^2$ (B) $x_2^2 < x_3^2 < x_1^2$ (C) $x_2^2 < x_1^2 < x_3^2$

(D) $x_1^2 < x_3^2 < x_2^2$ (E) $x_3^2 < x_2^2 < x_1^2$

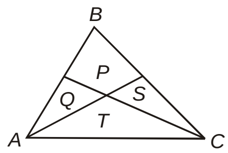
22. В автомобильных гонках участвовали три машины. Они стартовали в таком порядке: Я, Ф, К, то есть сначала «Ягуар», потом «Феррари», потом «Кенгуру». На дистанции «Ягуар» обогнали 3 раза, «Феррари» – 5 раз, а «Кенгуру» – 8 раз. В каком порядке машины пришли к финишу?

(A) Ф, К, Я (B) Я, К, Ф (C) К, Ф, Я (D) Я, Ф, К
(E) нельзя определить

23. Сколько пар натуральных чисел (a, b), где $a \leq b$, удовлетворяют равенству НОК(a, b) = НОД(a, b) + 10?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5
(E) другой ответ

24. Треугольник ABC разделен на 4 фигуры, площади которых указаны на рисунке. Сколько из равенств $P = Q = S = T$, $P = Q = T$, $Q = S = T$, $P = T$ возможны?



(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

25. Если $a + 2b \geq 3$, $b + 3c \geq 5$, $a, b, c \geq 0$, то наименьшее из возможных значений суммы $a + b + c$ равно

(A) 2 (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) 3 (E) 5

26. Маша и Никита получили по одинаковой порции мороженого. Есть его они начинают одновременно. Растягивая удовольствие, Маша каждую секунду съедает одну сотую часть того, что у нее осталось. Никита же, съев треть порции в первую секунду, в каждую следующую секунду съедает одну треть того, что он съел в предыдущую секунду. Тогда

(A) Никита в любой момент съел не меньше Маши
(B) когда-нибудь Никита съест больше полпорции
(C) когда-нибудь Маша съест больше полпорции
(D) когда-нибудь Маша съест втрое больше Никиты
(E) среди (A) – (D) нет верного утверждения

27. Известно, что $a + b + c = 7$ и $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{7}{10}$.

Тогда число $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ равно

(A) $\frac{19}{10}$ (B) $\frac{17}{10}$ (C) $\frac{9}{7}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{10}{7}$

28. Пусть k – натуральное число, большее 2. Сколько пар (a, b) натуральных чисел удовлетворяют уравнению $a^2 + b^2 = kab$?

(A) 4 (B) 1 (C) 0 (D) ответ зависит от k
(E) бесконечно много

29. На конкурсе «Кенгуру» Настя сначала выбрала 3 особенно понравившиеся ей задачи и решила их, потратив по 3 минуты на каждую. Оставшиеся 66 минут она распределила между остальными 27 задачами пропорционально количеству баллов, даваемых за задачу. Какое наименьшее суммарное время она могла затратить на решение всех десяти четырехбалльных задач?

(A) $23\frac{29}{37}$ минуты (B) 25 минут (C) $22\frac{8}{111}$ минуты
(D) $26\frac{1}{9}$ минуты (E) другой ответ

30. Сколько различных равнобедренных треугольников с боковыми сторонами 1 см могут быть разрезаны на два равнобедренных треугольника?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) другой ответ

Время, отведенное на решение задач, — 75 минут!